Examen de mécanique du solide

Lundi 31 octobre 2011 (1,5 heure)

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Question de cours *(~ 4 points)*

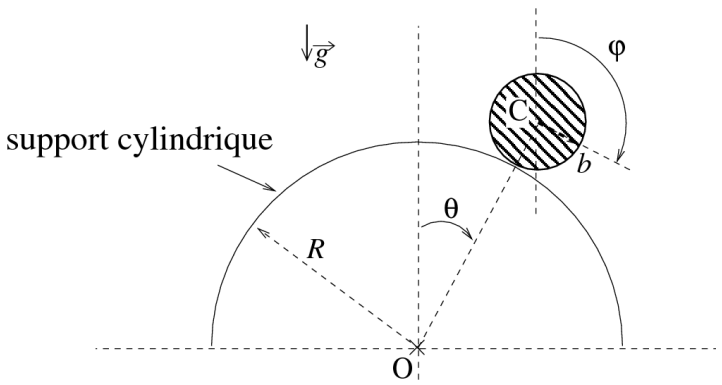
a) Énoncer et démontrer le théorème de Koënig pour le moment cinétique.

b) Calculer le moment d'inertie d'un disque de rayon *R*, de masse *m*, d'épaisseur négligeable, par rapport à son axe (axe perpendiculaire au disque passant par son centre).

Exercice 2. Sphère sur un profil cylindrique *(~ 10 points)*

Une sphère homogène, de masse *m*, de centre C et de rayon *b*, se déplace sur un support cylindrique fixe de rayon *R* de centre O. Le moment d'inertie de sphère par rapport à un axe passant par son centre est $J=2mb^2/5$. On supposera que la sphère reste en permanence en contact avec le support cylindrique. La position de C est repérée par un angle θ avec la verticale et la rotation de la sphère est décrite par un angle φ entre un point fixe de la sphère et la verticale (voir figure). Le contact entre la sphère et le support est caractérisé par un coefficient de frottement μ ($\mu=\mu_d=\mu_s$).

La sphère est lâchée du sommet du cylindre ($\theta=0$), sans vitesse initiale ; puis elle roule sans glisser du côté $\theta>0$.



a) Justifier le fait que le mouvement de C est dans un plan (plan de la figure).

b) Quel est le vecteur instantané de rotation de la sphère ? Montrer que $(R+b)\dot{\theta}=b\dot{\varphi}$.

c) Écrire le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique pour la sphère.

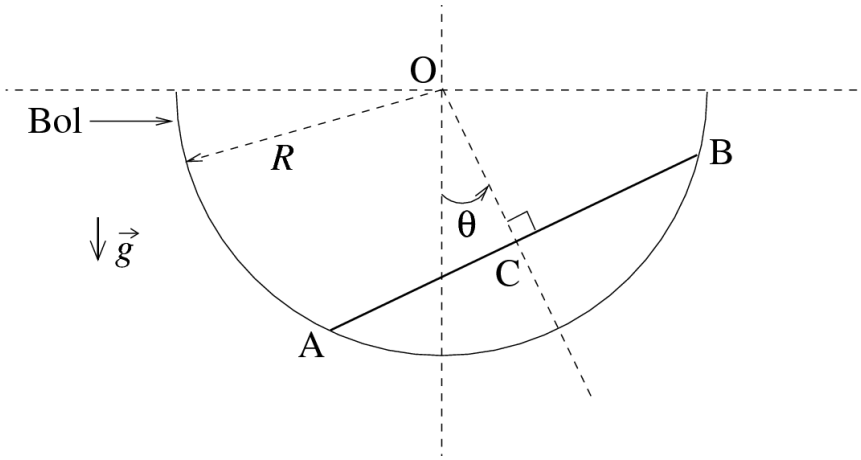
d) En déduire, l'expression de la force de frottement (force de résistance au glissement) $\|\vec{T}\|$ sur la sphère et de la composante normale $\|\vec{N}\|$ de la réaction du cylindre sur la sphère, en fonction θ , *m*, *b* et *R*.

e) En supposant que la sphère reste toujours en contact avec le support, déterminer l'angle pour lequel la sphère se met à glisser.

Exercice 3. Oscillation d'une barre dans un bol *(~ 6 points)*

En utilisant un théorème d'énergie, calculer la période des petites oscillations de la barre AB (homogène de masse m, de longueur $2l$ = AB et de milieu C), dans un bol fixe en forme de demi-sphère (centre O, rayon R tel que $l < R$). Voir figure.

Les contacts entre la barre et le bol sont supposés sans frottement. On supposera que le mouvement de la barre AB est dans le plan de la figure.

Indications :

- *Remarque : les droites (AB) et (OC) restent perpendiculaires.*
- *N'oubliez pas la relation géométrique entre OC, l et R.*
- *Pour calculer la période des oscillations, on cherchera l'équation différentielle dont l'angle θ est solution. Puis on résout cette équation dans la limite des petits angles θ .*
- *Le moment d'inertie d'une barre de longueur 2l par rapport à un axe perpendiculaire passant par son milieu est* $J = m(2l)^2/12$.